Referat: Bahnbestimmung nach dem Prinzip von GAUSS, Methode von VEITHEN - MERTON

Problem

Aus der beobachteten scheinbaren Bahn ist die räumliche Bahn des Himmelskörpers unter Zugrundelegung eines bestimmten Bewegungsmodells zu bestimmen. Dieses Bewegungsmodell wird hier folgendermaßen charakterisiert: Die Bahn des Himmelskörpers ist eine Kegelschnittslinie, in deren (einem) Brennpunkt die Sonne steht – die Bewegung erfolgt nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz.

Die Ableitung der geometrischen und physikalischen Kenngrößen der Raumbahn, der Bahnelemente, erfolgt über die heliozentrischen Koordinaten des Himmelskörpers. Deren Berechnung geschieht durch zweckmäßige Variation der numerischen Werte der Verhältnisse der Dreiecksflächen mit Hilfe des Verhältnisses Sektor zu Dreieck. Sind die geometrischen und dynamischen Bahnbedingungen erfüllt, so gilt das Problem als gelöst. Störungen also unberücksichtigt!

Lösung

1. Reduktion der Beobachtungen

Es sind mindestens drei Positionen samt zugehörigen Terminen erforderlich.

1.1. Die Ausgangsdaten seien sphärische Koordinaten $\alpha_i, \delta_i\ (i = 1 - 3))$ bezogen auf ein mittleres mittleres Normalaquinoktium (1950.0) oder auf den Jahresanfang. Es sind an die beobachteten Örter also Präzessions- und Aberrationskorrekturen (siehe Sternfreundeseminare 1976 und 1977) anzubringen.

1.2. Die drei Termine seien in Ephemeridenzeit (ET) ausgedrückt. ET= UT + Δt ?

1.3. Lichtzeit
Die Lichtzeit Δt_i (in mittleren Tagen) = 0.00577 Δ_i wird im Verbesserungsverfahren mit der Kenntnis der genäherten geozentrischen Distanzen Δ_i (in AE) angebracht.

1.4. Tägliche Parallaxe
Der parallaktische Effekt wird dadurch eliminiert, daß man die geozentrischen Sonnenkoordinaten (X', Y', Z') aufs Topozentrum korrigiert.

$$\begin{aligned}
\Delta X &= -\varrho_0 \pi \sin 1'' \cos \varphi \cos \theta & X &= X' + \Delta X \\
\Delta Y &= -\varrho_0 \pi \sin 1'' \cos \varphi \sin \theta & Y &= Y' + \Delta Y \qquad (1) \\
\Delta Z &= -\varrho_0 \pi \sin 1'' \sin \varphi & Z &= Z' + \Delta Z
\end{aligned}$$

ϱ_0 Geozentrische Mittelpunktsabstand des Beobachtungsortes
π Äquatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne (8,8")
$\varrho_0 = 0.99832 + 0.0016855 \cos 2\varphi$

2. Die Methode von VEITHEN - MERTON

2.1. Grundlagen

Sind α_i, δ_i $(\mathrm{i} = 1{,}2{,}3)$ die reduzierten Beobachtungen und X_i, Y_i, Z_i die auf dasselbe Äquinoktium bezogenen rechtwinkeligen Sonnenkoordinaten, so erhält man die Komponenten des Richtungsvektors mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} a_i &= \cos\delta_i \cos\alpha_i \\ b_i &= \cos\delta_i \sin\alpha_i \\ c_i &= \sin\delta_i \end{aligned} \tag{2}$$

sowie die Distanzen Erde-Sonne aus

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 \tag{3}$$

Aus der Gleichung

$$R_i \cos\vartheta_i = -(a_i X_i + b_i Y_i + c_i Z_i) \tag{4}$$

ergibt sich ϑ_i als der äußere Winkel an der Erde im Dreieck Sonne-Erde-Planet.

2.2. Die erste Näherung

Mittels der drei Beobachtungstermine werden die Zwischenzeiten τ_i wie folgt berechnet

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2) \qquad \tau_2 = k(t_3 - t_1) \qquad \tau_3 = k(t_2 - t_1) \tag{5}$$

k = 0.0172021

Für die Verhältnisse der doppelten Dreiecksflächen n_1, n_3 (Sonne-Erde-Planet) lassen sich folgende Reihenentwicklungen in den τ_i und r_2 aufstellen.

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{1}{6}\tau_1\tau_3 \frac{1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}}{r_2^3} + \ \ldots \qquad\qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{1}{6}\tau_1\tau_3 \frac{1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}}{r_2^3} + \ \ldots$$

Setzt man nun $n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau_2}, n_3^0 = \frac{\tau_3}{\tau_2}$ und (6)

$$v_1 = \tfrac{1}{6}\tau_1\tau_3(1 + n_1^0) \qquad v_3 = \tfrac{1}{6}\tau_1\tau_3(1 + n_3^0) \tag{7}$$

so mangelt es noch an der Kenntnis des mittleren Radiusvektors r_2 zur Ermittlung von genäherten Werten für n_1, n_3.
Zur Bestimmung von r_2 sowie der geozentrischen Distanz Δ_2 des Planeten gestalten sich die beiden notwendigen Gleichungen wie folgt.

a) $\Delta_2 = k - \frac{1}{r_2^3}$ wobei gilt (8)

$$k = \frac{d_1 n_1^0 - d_2 + d_3 n_3^0}{D} \qquad l = \frac{d_1 v_1 + d_3 v_3}{D}$$

$$d_i = X_i(b_1 c_3 - b_3 c_1) - Y_i(a_1 c_3 - a_3 c_1) + Z_i(a_1 b_3 - a_3 b_1)$$
$$D = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

b) Die geometrische Bedingung im Dreieck Sonne-Erde-Planet

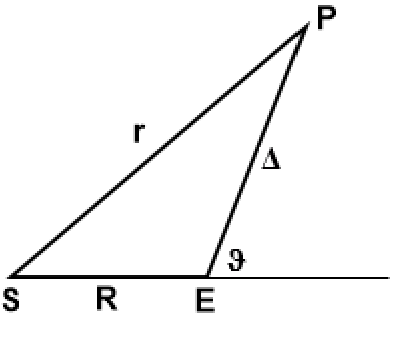
$$r_2^2 = R_2^2 + 2R_2 \Delta_2 \cos \vartheta_2 + \Delta_2^2 \qquad (9)$$

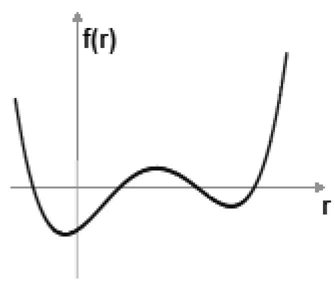
stellt die 2. Gleichung in den Unbekannten r_2, Δ_2 dar.
Gleichung (8) eingesetzt in (9) ergibt eine Gleichung 8.Grades in r, genannt die

2.3. Lagrange'sche Schlüsselgleichung (10)

$$r_2^8 - (R_2^2 + 2R_2 \cos \vartheta_2 k + k^2) r_2^6 + (2R_2 \cos \vartheta_2 l + 2kl) r_2^3 - l^2 = 0$$

Diese Gleichung wird am besten mit Hilfe eines programmierbaren Taschenrechners gelöst; sie besitzt 4 reelle Wurzeln. Davon ist eine Lösung negativ und somit, da r als Entfernung immer positiv sein muß, unbrauchbar. Es verbleiben 3 Lösungen von denen eine, r=1, die Erdbahnlösung darstellt. Ist r=1 die mittlere Lösung, so läßt sich die Entscheidung treffen: Ist $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ so ist r > R (dies ist bei den kleinen Planeten im allgemeinen der Fall), ist $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ so gilt meist r < R. Sind beide nicht trivialen Lösungen größer oder kleiner als 1, so kann erst durch eine weitere Beobachtung, die dann durch die unzutreffenden Bahnelemente nicht dargestellt wird, die wahre Lösung ermittelt werden.





Mit den bekannten Größen r_2, Δ_2 ergeben sich:

$$n_i = n_i^0 + \frac{v_i}{r_2^3} \qquad (i = 1{,}3) \qquad (11)$$

und die restlichen geozentrischen Distanzen Δ_1, Δ_3 aus den Gleichungen

$$a_1 n_1 \Delta_1 + a_3 n_3 \Delta_3 = a_2 \Delta_2 + n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3 \qquad (12)$$

$$c_1 n_1 \Delta_1 + c_3 n_3 \Delta_3 = c_2 \Delta_2 + n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3$$

wobei die rechten Seiten bekann sind.

$$r_i^2 = R_i^2 + 2R_i \cos \vartheta_i \Delta_i + \Delta_i^2 \qquad (i = 1{,}3) \qquad (13)$$

Zuletzt folgen die ersten Näherungswerte für die rechtwinkeligen heliozentrischen Koordinaten der Planetenörter.

$$x_i = a_i \Delta_i - X_i$$

$$y_i = b_i \Delta_i - Y_i \qquad (i = 1{,}2{,}3) \qquad (14)$$

$$z_i = c_i \Delta_i - Z_i$$

3. Das Verbesserungsverfahren

3.1. Terminverbesserung

Unter Berücksichtigung der Lichtzeit ergeben sich die verbesserten Termine t_1^v, t_2^v, t_3^v in mittleren Tagen zu

$$t_i^v = t_i - A\Delta_i \qquad A = 0.00577 \qquad (i = 1{,}2{,}3)$$

und die damit verbundenen Größen

$$\tau_1 = k(t_3^v - t_2^v) \qquad \tau_2 = k(t_3^v - t_1^v) \qquad \tau_3 = k(t_2^v - t_1^v)$$

sowie

$$n_1^0 = \frac{\tau_1^0}{\tau_2^0} \qquad n_3^0 = \frac{\tau_3^0}{\tau_2^0}$$

3.2. Das Verhältnis Sektor / Dreieck $\bar{y}_i$

Die Größen $\bar{y}_i$ geben das Verhältnis der in der Zwischenzeit τ_i aufgespannten Sektorfläche zur zugehörigen Dreiecksfläche.

Mittels der Hilfsgrößen κ_i *und* h_i $\quad (i = 1{,}2{,}3)$

$$\kappa_1^2 = r_2 r_3 + x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3$$

$$\kappa_1^2 = r_1 r_3 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 \qquad (15)$$

$$\kappa_1^2 = r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$h_1 = \frac{\tau_1^2}{\kappa_1^2(B\kappa_1 + r_2 + r_3)} \qquad B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tag{16}$$

Für h_2 bzw h_3 sind die Indizes zyklisch zu vertauschen.
- ergeben sich die $\bar{y}_i$ zu

$$\bar{y}_i = 1 + \frac{10}{11}\cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_i}{\dots}}} \tag{17}$$

Hansen'sche Kettenbruch

Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz folgt

$$n_1 = n_1^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} \qquad n_3 = n_3^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} \tag{18}$$

Stimmen die so erhaltenen Werte n_1, n_3 mit den aus Gleichung (11) erhaltenen überein, so kann man sofort mit der Ableitung der Elemente beginnen. Ist dies nicht der Fall, ist das Formelsystem (8) bis (19) mit den Werten n_1^0, n_3^0 und

$$v_1 = n_1^0 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} - 1\right) r_2^3 \qquad v_3 = n_3^0 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} - 1\right) r_2^3 \tag{19}$$

erneut durchzurechnen.

4. Die Ableitung der Bahnelemente

Man berechnet zunächst die Hilfsgrößen

$$\sigma = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1^2}$$
$$x^0 = x_3 - \sigma x_1$$
$$y^0 = y_3 - \sigma y_1 \qquad r^{02} = x^{02} + y^{02} + z^{02} \tag{20}$$
$$z^0 = z_3 - \sigma z_1$$

Die wahren Anomalien ν_1, ν_3 sowie der Parameter p und die Exzentrizität e folgen aus

$$\sin(\nu_3 - \nu_1) = \frac{r^0}{r_3} \qquad \cos(\nu_3 - \nu_1) = \frac{\sigma r_1}{r_3}$$

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r^0}{\tau_1}\bar{y}_2 \qquad q_1 = \frac{p}{r_1} - 1 = e\cos\nu_1 \qquad q_3 = \frac{p}{r_3} - 1 \tag{21}$$

$$e\sin\nu_1 = \frac{q_1\cos(\nu_3 - \nu_1) - q_3}{\sin(\nu_3 - \nu_1)} \qquad \nu_3 = \nu_1 + (\nu_3 - \nu_1)$$

Mit diesen Größen erhält man sofort die große Halbachse a, sowie die beiden exzentrischen Anomalien E_i

$$a = \frac{p}{(1-e)(1+e)} \qquad \tan\frac{1}{2}E_i = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{1}{2}v_i \qquad (i = 1,3) \qquad (22)$$

Die mittleren Anomalien M_i folgen aus der Keplergleichung, die tägliche Bewegung μ aus der Zwischenzeit.

$$M_i = E_i - e\left(\frac{180}{\pi}\right)\sin E_i \qquad (i = 1,3) \qquad \mu = \frac{M_3 - M_1}{t_3^v - t_1^v} \qquad (23)$$

Die Berechnung der Bahnneigung i, des Perihelarguments ω und der Länge des aufsteigenden Knotens Ω erfolgt zielführend über die Hilfsgrößen $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$.

$$P_x = x_1\frac{\cos v_1}{r_1} - x^0\frac{\sin v_1}{r^0} \qquad Q_x = x_1\frac{\sin v_1}{r_1} - x^0\frac{\cos v_1}{r^0}$$

$$P_y = y_1\frac{\cos v_1}{r_1} - y^0\frac{\sin v_1}{r^0} \qquad Q_y = y_1\frac{\sin v_1}{r_1} - y^0\frac{\cos v_1}{r^0} \qquad (24)$$

$$P_z = z_1\frac{\cos v_1}{r_1} - z^0\frac{\sin v_1}{r^0} \qquad Q_z = z_1\frac{\sin v_1}{r_1} - z^0\frac{\cos v_1}{r^0}$$

$$\sin i \sin\omega = P_z\cos\varepsilon - P_y\sin\varepsilon$$

$$\sin i \cos\omega = Q_z\cos\varepsilon - Q_y\sin\varepsilon \qquad (25)$$

$$\cos\Omega = P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega$$

Ekliptikschiefe 1950.0 ε = 23.4457889°

5. Anhang (Ephemeridenrechnung)

Die Berechnung einer Ephemeride mittels gegebener Bahnelemente kann folgendermaßen geschehen. Gegeben sei: die Größen T_0 (ET), M_0 (Mittlere Anomalie), a, e, i, ω, Ω und μ, sowie die rechtwinkeligen Sonnekoordinaten X, Y, Z bezogen auf das gleiche Äquinoktium. Die Ephemeride gelte für den Zeitpunkt T_1. Es ergibt so M_1 aus der Beziehung

$$M = \mu(T_1 - T_0) + M_0 \qquad (26)$$

Aus den Gleichungen (22) und (23) erhält man E und V, sowie r aus der Gleichung

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad (27)$$

Es folgt die Berechnung der Hilfsgrößen

$$F = \cos\Omega \qquad P = -\sin\Omega\cos i$$
$$G = \sin\Omega\cos\varepsilon \qquad Q = \cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon$$
$$H = \sin\Omega\ \sin\varepsilon \qquad R = \cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon$$
$$\tan A = \frac{F}{P} \qquad a^2 = F^2 + P^2$$
$$\tan B = \frac{G}{Q} \qquad b^2 = G^2 + Q^2 \qquad (28)$$
$$\tan C = \frac{H}{R} \qquad c^2 = H^2 + R^2$$

wobei für die Vorzeichen gilt:

$$SIGN\ (\sin A) = SIGN(\cos\Omega)$$
$$SIGN\ (\sin B, \sin C) = SIGN(\sin\Omega)$$

Für die rechtwinkeligen heliozentrischen Gestirnskoordinaten gilt sodann

$$x = r\ a\ sin(A + \omega + V)$$
$$y = r\ b\ sin(B + \omega + V) \qquad (29)$$
$$z = r\ c\ sin(C + \omega + V)$$

In recht einfacher Weise erhält man zuletzt die sphärischen Koordinaten α, δ und die geozentrische Distanz Δ aus

$$\tan\alpha = \frac{Y+y}{X+x} \qquad \Delta^2 = (X+x)^2 + (Y+y)^2 + (Z+z)^2$$
$$\sin\delta = \frac{Z+z}{\Delta} \qquad (30)$$

6. <u>Beispiele</u>

Kleinplanet 486 Cremona

Beobachtungen: Ing. Erich Meyer, Davidschlag OÖ

	1981 ET		
I	März 27.86865	$10^h\ 54^m\ 56{,}73^s$	$+27^0\ 36'\ 30.4''$
II	März 29.84226	$10^h\ 53^m\ 38.99^s$	$+27^0\ 36'\ 54{,}4''$
III	April 3.86873	$10^h\ 50^m\ 51.37^s$	$+27^0\ 31'\ 33.1''$

	X	Y	Z	R
I	+0.991 3936	+0.106 3062	+0.046 0898	0.998 1415
II	+0.987 4458	+0.137 2923	+0.059 5244	0.998 7200
III	+0.972 2344	+0.215 4305	+0.093 4017	0.000 1869

D = 0.000 008837 k = 0.017 2021

τ_1 = 0.086 4658 τ_2 = 0.120 4161 τ_3 0.033 9502

n_1^0 = 0.718 0589 n_1^0 = 0.281 9411 v_1 = 0.000 8406 v_3 = 0.000 6272

$r_1 = 2.08074$ $\Delta_1 = 1.19592$
$r_2 = 2.07797$ $\Delta_2 = 1.20444$ → Lösung der Gl. (10)
$r_3 = 2.07103$ $\Delta_3 = 1.22912$

$n_1 = 0.7181526$ $n_3 = 0.2820110$

genäherte heliozentrische Koordinaten

$x_1 = -2.008\,7329$ $y_1 = 0.190\,4837$ $z_1 = 0.508\,1314$
$x_2 = -2.010\,2644$ $y_2 = 0.167\,3810$ $z_2 = 0.498\,7694$
$x_3 = -2.012\,9902$ $y_3 = 0.108\,4490$ $z_3 = 0.474\,6348$

Verbesserungsverfahren

$t_1^v = 27.86175$ $t_2^v = 29.83531$ $t_3^v = 3.86164$
$n_1^0 = 0.718\,0584$ $n_1^0 = 0.281\,9416$
$\bar{y}_1 = 1.000\,13958$ $\bar{y}_2 = 1.000\,27020$ $\bar{y}_3 = 1.000\,02137$
$n_1 = 0.718\,1522$ $n_3 = 0.282\,0117$ weiterer Iterationsschritt notwendig
$v_1 = 0.000\,8416$ $v_3 = 0.000\,6295$
$n_1 = 0.718\,1523$ $n_3 = 0.282\,0118$

endgültige heliozentrische Koordinaten

$x_1 = -2.008\,3671$ $y_1 = 0.190\,3770$ $z_1 = 0.507\,9321$
$x_2 = -2.009\,8993$ $y_2 = 0.167\,2723$ $z_2 = 0.498\,5700$
$x_3 = -2.012\,6345$ $y_3 = 0.108\,3348$ $z_3 = 0.474\,4407$

$\bar{y}_1 = 1.000\,1397$ $\bar{y}_2 = 1.000\,2704$ $\bar{y}_3 = 1.000\,02138$
$n_1 = 0.718\,1523$ $n_3 = 0.282\,0178$ Differenz = 0

<u>Elemente</u>

$p = 2.310\,4497$ $\underline{e = 0.166\,7839}$ $= 9.60\,088^0$
$V_1 = 311.54707^0$ $V_3 = 313.97967^0$ $\underline{a = 2.37655\,AE}$
$E_1 = 318.36130^0$ $E_3 = 320.51587^0$
$M_1 = 324.71062^0$ $M_3 = 326.59220^0$ $\underline{\mu = 0.268802^0}$
$\underline{i = 11.14261^0}$ $\underline{\omega = 124.54922^0}$ $\underline{\Omega = 93.53159^0}$
$\underline{M_0 = 354.04720^0}$ $\underline{T_0 = 1981.07.15}$

Gegenüberstellung der Bahnelemente aus dem Jahrbuch kleiner Planeten:

M_0 ... mittlere Anomalie zu T_0 354.51454⁰

ω	Perihelargument	123.95952°	(1950.0)
Ω	Knotenlänge	93.90662°	(1950.0)
i	Bahnneigung	11.08813°	(1950.0)
e	Num. Exzentritität	0.16308oo	
a	Halbachse	2.35239 AE	
µ	Mittl. tägl. Bewegung	0.27317°	

Mit den aus dem Beispiel hervorgegangenen Elementen wurden zwei weitere Beobachtungen nachgerechnet.

1) t = April 3.85059 ET 1981

$\propto_g$ = $10^h\ 50^m\ 52.27^s$ $\propto_b$ = $10^h\ 50^m\ 51.96^s$ $\cos\delta\ \Delta\propto = 0.27^s$
δ_g = 27° 31‘ 35.7“ δ_b = 27° 31‘ 35.8“ $\Delta\delta$ = 0.1“

2) t = Jänner 29.97564 ET 1981

$\propto_g$ = $11^h\ 34^m\ 26.06^s$ $\propto_b$ = $11^h\ 34^m\ 24.77^s$ $\cos\delta\ \Delta\propto$ = 0.3‘
δ_g = 19° 42‘ 49.3“ δ_b = 19° 38‘ 02.5“ $\Delta\delta$ = 4.7‘

g … gerechnet b … beobachtet

Der Vergleich zeigt, daß die gewonnenen Elemente (ohne jegliche Störungsrechnung) das Auffinden des Kleinplaneten auch nach Monaten gestatten.

Kleinplanet 13 Egeria (s. Referat „Ephemeriden Kleiner Planeten“):
Berechnung einer Ephemeride nach Kapitel 5 für den Termin
t_1 1982 09 18.0
Die benötigten Bahnelemente lauten:

T_0 = 1982 09 18.0	M_0 = 234.20218°	X = -0.999 9479
ω = 79.94 192°	Ω = 42.89013°	Y = 0.091 4512
i = 16.50567°	e = 0.0885345	Z = 0.039 6644
µ = 0.238432°	a = 2.5756866 AE	

Es ergeben sich die Größen zu

M_1 = 241.35514°	x = 2.636 6989	α = $0^h\ 26.1^m$
E_1 = 237.09622°	y = 0.095 4700	δ = -17° 53‘
V_1 = 232.93116°	z = -0.571 2659	Δ = 1.73104 AE
r = 2.69956 AE		

Die zugehörigen Jahrbuchswerte lauten α = $0^h\ 26.0^m$ δ = -17° 53‘

Literatur G.Stracke, Bahnbestimmung d. Planeten u. Kometen 1929
J.Meeus, Astronomical Formulae for Calculators 1978

Robert Weber, Reclamg.8, A-1220 Wien