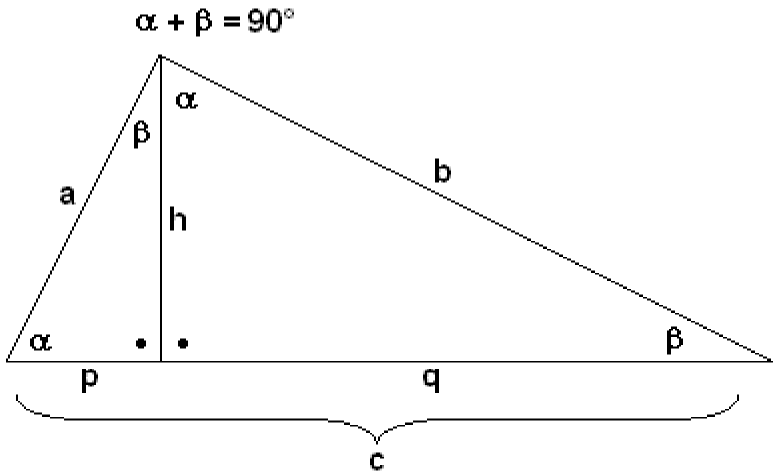
Ein Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes

Rechtwinkeliges Dreieck



1. Die Winkelsumme in jedem Dreieck ist 180°, bei einem rechtwinkeligen Dreieck ist daher $\beta = 90 - \alpha$
2. Bei Dreiecken, die verschieden groß sind, aber gleiche Winkel haben, verhalten sich die Seitenlängen proportional zueinander. Indem man die Höhenlinie einzieht erhält man 2 solcher Dreiecke (a-h-p und b-q-h).
3. Wenn man in einem beliebigen Rechteck eine Diagonale zieht, teilt man es dadurch in 2 gleiche, rechtwinkelige Dreiecke. So hat jedes dieser Dreiecke genau die halbe Fläche wie das Rechteck. So kann man die Fläche eine rechtwinkeligen Dreiecks bestimmen, indem man ein Rechteck darüber zieht.

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q} \quad \Rightarrow \quad h^2 = p \cdot q$$

So kann man sogar die Höhe des Dreiecks, aber auch p und q bestimmen, ohne die Winkel zu kennen:

$$F \ldots \text{Fläche des Dreiecks}$$

$$2 \cdot F = a \cdot b = h \cdot c \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{a \cdot b}{c}$$

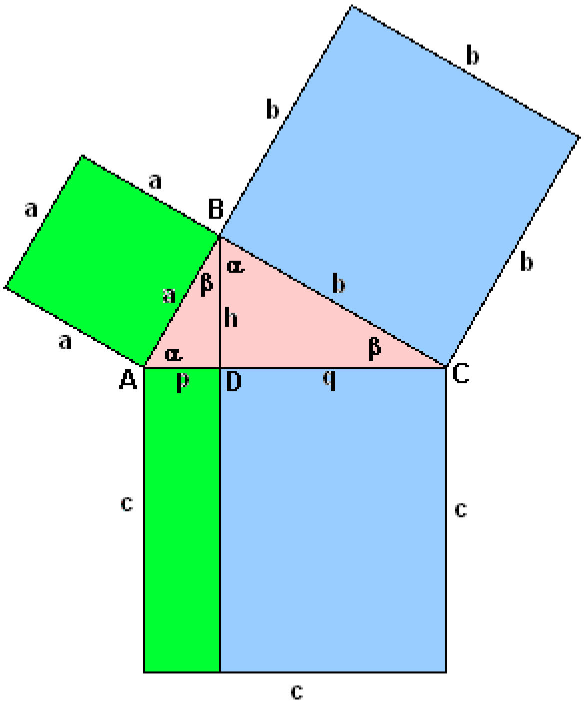
$$\frac{p}{a} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad p = h\frac{a}{b} = \frac{a^2}{c} \qquad\qquad \frac{q}{b} = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad q = h\frac{b}{a} = \frac{b^2}{c}$$

$$c = p + q = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Pythagoräischer Lehrsatz

Beweis durch den Vergleich der Flächen a^2 und $p \cdot c$



In den beiden Dreiecken desselben Winkels α zwischen a und p ist:

Im Dreieck ABD: $p = a \cdot \cos\alpha$

Im Dreieck ABC: $a = c \cdot \cos\alpha$

$k = \cos\alpha$ man nehme k anstatt des Cosinus α als Verkürzungsfaktor:

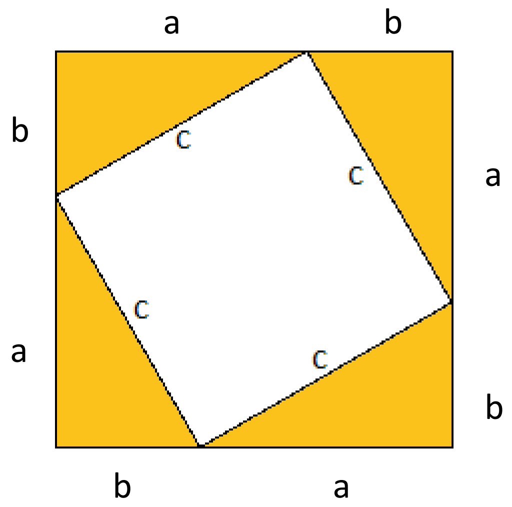
$$p \cdot c = a \cdot k \cdot \frac{a}{k} = a^2$$

demnach ist das grüne Rechteck flächengleich mit dem grünen Quadrat

beim blauen ist es genauso, wenn man α durch β, a durch b und p durch q ersetzt. Es ist nämlich bei der sog. „Projektion" von a auf p die Verkürzung um denselben Faktor wie bei der Projektion von c auf a, weil der Winkel derselbe ist. D.h., was durch die Projektion der Seite des Quadrates beim grünen Rechteck entstanden ist: Was die Seitlänge von p gegenüber a verkürzt ist, ist die Seitenlänge von c gegenüber a um denselben Faktor verlängert. So ist die Fläche des Rechtecks gleich der Fläche des Quadrates.

Erich Foltyn
Wien
Juni 2008

Der beste Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes



F ..... Fläche

$$F_{Dreieck} = \frac{ab}{2}$$

$$F_{Gro\beta esQuadrat} = c^2 + 4.F_{Dreieck}$$

$$F_{Gro\beta esQuadrat} = c^2 + 2.ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

daraus folgt : $\quad c^2 = a^2 + b^2$

Erich Foltyn
Wien, Österreich
17. Juli 2011